“皖南八校”2018届高三第三次联考·数学(理科)
参考答案、解析及评分细则

一、选择题

1.A 2.C 3.C 4.B 5.A 6.B 7.C 8.D 9.A 10.B 11.B 12.D

二、填空题

13.60 14.3500 15.$\frac{37\sqrt{3}}{2}$ 16.6

三、解答题

17.解:(Ⅰ)由题知,$2a_n=2+S_n$

当$n=1$时,$a_1=2$, …… 1分

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2-(2a_{n-1}-2)$, …… 3分

即:$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$,∴数列$\{a_n\}$为以2为公比的等比数列, …… 5分

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$, …… 6分

(Ⅱ)由$a_n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{b_n}$,即$2^{2n}=2^{-b_n}$ ∴$b_n=-2n$, …… 8分

$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(-2n)(-2n-2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n+1)n}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$, …… 10分

∴$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{n}{4(n+1)}$. …… 12分

18.(Ⅰ)证明:连接A_1B、A_1D,

由题设知$\triangle ABA_1$、$\triangle ADA_1$均是边长为2的等边三角形, …… 1分

∴$A_1B=A_1D=2$,∴$\triangle ABD\cong\triangle A_1BD$, …… 2分

∵底面$ABCD$是正方形,∴AC与BD垂直平分于点O, …… 3分

∴$A_1O\perp BD$,且$A_1O=AO=\sqrt{2}$, …… 4分

∵$A_1O^2+AO^2=4=A_1A^2$,∴$A_1O\perp AO$, …… 5分

∵$AO\cap BD=O$,AO,$BD\subset$平面$ABCD$,∴$A_1O\perp$平面$ABCD$; …… 6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知$BD\perp$平面ACC_1A_1,∴$BD\perp OC$,$BD\perp OC_1$,

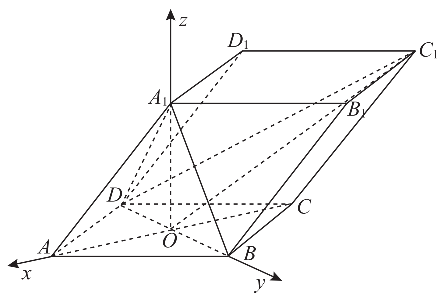
…… 7分

∴$\angle C_1OC$为二面角C_1-BD-C的平面角. …… 8分

以O为原点,建立空间直角坐标系如图,则$\overrightarrow{OC}=(-\sqrt{2},0,0)$,

…… 9分

$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$, …… 10分



$\therefore \cos\angle C_1OC=\cos\langle\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC_1}}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OC_1}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,………………………………… 11 分

$\therefore$二面角 C_1-BD-C 的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………… 12 分

19.(Ⅰ)因为年龄在[25,35)的人中男性、女性使用人数占总体的比例

分别为$\dfrac{360}{600}=\dfrac{3}{5}$,$\dfrac{240}{600}=\dfrac{2}{5}$, …………………………………………………………… 1 分

所以抽取的 10 人中男性、女性人数分别为$\dfrac{3}{5}\times10=6$,$\dfrac{2}{5}\times10=4$,……………………………… 3 分

(Ⅱ)由题知,在(Ⅰ)中选出的 10 人中,女性使用者人数为 4,

所以 4 人中恰有 2 女性使用者的概率为$\dfrac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$, ………………………………………… 6 分

(Ⅲ)由题知,ξ 的可能取值为 0,1,2,3,4.

因为用样本估计总体,任取 1 人,是男性使用者的概率为$\dfrac{600}{1000}=\dfrac{3}{5}$,

所以随机变量 ξ 服从二项分布,即 $\xi\sim B(4,\dfrac{3}{5})$,……………………………………………………… 7 分

$P(\xi=0)=C_4^0\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=\dfrac{16}{625}$,$P(\xi=1)=C_4^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^1\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{96}{625}$,$P(\xi=2)=C_4^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$,

$P(\xi=3)=C_4^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)^1=\dfrac{216}{625}$,$P(\xi=4)=C_4^4\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\left(\dfrac{2}{5}\right)^0=\dfrac{81}{625}$,…………………………… 11 分

所以的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
p	$\dfrac{16}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{81}{625}$

……………………………………………………………………………………………………… 12 分

20.解:(Ⅰ)依题意,$2a=4$,$a=2$, ……………………………………………………………… 1 分

$\because e=\dfrac{1}{2}$,$\therefore c=1$,$b^2=a^2-c^2=3$, ………………………………………………………… 3 分

$\therefore$椭圆 C 方程为:$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$; …………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB:$x=my+1$,

则由$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$可得$3(my+1)^2+4y^2=12$,

即$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$. ……………………………………………………………… 6 分

$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$

又∵$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$，∴四边形 $AMBF_1$ 是平行四边形. …………………………………………………… 7 分

设平行四边形 $AMBF_1$ 的面积为 S,则

$S=2S_{\Delta ABF_1}=2\times\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1-y_2|=2\frac{\sqrt{\Delta}}{3m^2+4}=24\frac{\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$， ……………………………………… 9 分

设 $t=\sqrt{m^2+1}$,则$m^2=t^2-1(t\geqslant1)$，

∴$S=24\times\frac{t}{3t^2+1}=24\times\frac{1}{3t+\frac{1}{t}}$，

∵$t\geqslant1$ ∴$3t+\frac{1}{t}\geqslant4$,∴$S\in(0,6]$，…………………………………………………………… 11 分

∴四边形 $AMBF_1$ 面积的最大值为 6. ………………………………………………………… 12 分

21.解:(Ⅰ)$f'(x)=e^x-2x-a$,设 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=e^x-2$,…1 分

当 $x<\ln 2$ 时,$g'(x)<0$,∴$g(x)$在$(-\infty,\ln 2)$单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时,$g'(x)>0$,∴$g(x)$在$(\ln 2,+\infty)$单调递增； ……………………………………… 2 分

∴当 $x=\ln 2$ 时,$g(x)$取得最小值 $2-2\ln 2-a$,……………………………………………………… 3 分

∵函数 $f(x)$有两个极值点,∴函数 $f'(x)$有两个零点，

∴$2-\ln 2-a<0$,∴$a>2-2\ln 2(>0)$， …………………………………………………………… 4 分

此时 $g\left(-\frac{a}{2}\right)=e^{-\frac{a}{2}}>0$；………………………………………………………………………………… 5 分

$g(a+2)=e^{a+2}-3a-4=e^2\cdot e^a-3a-4$

设 $\varphi(x)=e^x-x-1$,则 $\varphi'(x)=e^x-1$,

∵$x<0$ 时,$\varphi'(x)<0$;$x>0$ 时,$\varphi'(x)>0$。

∴$\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$单调递增。

∴$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$,即 $e^x\geqslant x+1$

∴$e^2\cdot e^a-3a-4\geqslant e^2(a+1)-3a-4=(e^2-3)a+(e^2-4)>0$,即 $g(a+2)>0$， ……………………… 6 分

综上可得 a 的取值范围是$(2-\ln2,+\infty)$. ……………………………………………………… 7 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,x_1、x_2 是方程 $g(x)=0$ 的两根，

∴$e^{x_1}=2x_1+a$,$e^{x_2}=2x_2+a$， ………………………………………………………………… 8 分

且 $x\in[x_1,x_2]$时,$g(x)=f'(x)\leqslant0$，

∴$f(x)$是$[x_1,x_2]$上的减函数,…………………………………………………………………………… 9 分

∴$f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}-x_1^2-ax_1-e^{x_2}+x_2^2+ax_2$

$=2x_1+a-x_1^2-ax_1-2x_2-a+x_2^2+ax_2$

$=(x_2-x_1)(x_1+x_2+a-2)>0$， ……………………………………………………………… 10 分

∵$x_1<x_2$,∴$x_1+x_2+a-2>0$,即 $x_1+x_2+a>2$, …………………………………………… 11 分

$\therefore e^{x_1}+e^{x_2}=2x_1+a+2x_2+a=2(x_1+x_2+a)>4$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ)圆 C 的普通方程是 $(x-2)^2+y^2=4$，又 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

所以圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $P(\rho_1,\theta_1)$，则有 $\rho_1=4\cos\theta_1$，

设 $Q(\rho_2,\theta_1)$，且直线 l 的方程是 $\rho(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=\sqrt{3}$，则有 $\rho_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta_1+\sqrt{3}\cos\theta_1}$，………………………… 8 分

所以 $|OP||OQ|=\rho_1\rho_2=\dfrac{4\sqrt{3}\cos\theta_1}{\sin\theta_1+\sqrt{3}\cos\theta_1}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan\theta_1}\left(\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta_1\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $2\leqslant|OP||OQ|\leqslant3$. ………………………………………… 10 分

23. (Ⅰ)解：不等式 $2|x-2|+|x+1|<6$ 等价于不等式组

$\begin{cases}x<-1,\\-3x+3<6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant2,\\-x+5<6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\3x-3<6,\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

所以不等式 $2|x-2|+|x+1|<6$ 的解集为 $(-1,3)$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)证明：因为 $m+n+p=3$，

所以 $(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2mp=9$，………………………………………… 7 分

因为 m,n,p 为正实数，所以由基本不等式得 $m^2+n^2\geqslant2mn$(当且仅当 $m=n$ 时取等号)，

同理：$n^2+p^2\geqslant2np$；$p^2+m^2\geqslant2mp$，所以 $m^2+n^2+p^2\geqslant mn+np+mp$，………………………… 8 分

所以 $(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2mp=9\geqslant3mn+3np+3mp$，………………………… 9 分

所以 $mn+np+pm\leqslant3$. ………………………………………… 10 分